DEFINICIÓN: $f(x)$ es infinitésimo en x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$

Ejemplos: $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$ $\quad$ $\operatorname{sen} x$ es infinitésimo en cero

$\lim_{x\to 1} (x-1)^3 = 0$ $\quad$ $(x-1)^3$ es infinitésimo en 1

DEFINICIÓN: Sea $f(x)$ y $g(x)$ ambos infinitésimos en x_0. Entonces se dice que $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes si

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

TEOREMA: Sea $f(x)$ una función n veces derivable en un entorno de x_0: $f(x)$ es equivalente en x_0 a su n-ésimo polinomio de Taylor

Ejemplos: $f(x)=\operatorname{sen} x$ es infinitésimo en cero, entonces

$$\operatorname{sen} x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$f(x)=\cos x$ no es infinitésimo en cero pero:

$$\cos(x) - 1 = \cancel{1} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - \cancel{1}$$

$$\underbrace{\cos(x)-1}_{} \sim -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

(Ahora sí es infinitésimo en cero)

La siguiente tabla, que nos muestra las equivalencias "más usuales", se utiliza para calcular tanto límites de sucesiones como de funciones.

En $x \to 0$		En $x \to 1$
$\operatorname{sen} x \equiv x$	$1-\cos x \equiv \frac{x^2}{2}$	$\ln(x) \equiv x-1$
$\operatorname{tg} x \equiv x$	$e^x - 1 \equiv x$	$\operatorname{tg}(x^2-1) \equiv x^2-1$
$\arcsin x \equiv x$	$a^x - 1 \equiv x \cdot \ln a$	$\operatorname{sen}(x-1) \equiv x-1$
$\operatorname{arctg} x \equiv x$	$\ln(1+x) \equiv x$	

Tema 1. Diapositiva 25

OBSERVACIÓN MUY IMPORTANTE

Muchas veces tenemos que tener en cuenta más términos del polinomio de Taylor.

EQUIVALENCIAS -SUCESIONES

Si el $\lim_{n \to \infty} \{x_n\} = 0$ entonces podemos establecer la siguientes relaciones de equivalencias:

$$\operatorname{sen}\{x_n\} \sim \{x_n\} \qquad 1 - \cos\{x_n\} \sim \{x_n\}$$

$$\operatorname{tg}\{x_n\} \sim \{x_n\} \qquad e^{\{x_n\}} - 1 \sim \{x_n\}$$

$$\operatorname{arcosen}\{x_n\} \sim \{x_n\} \qquad a^{\{x_n\}} - 1 \sim \{x_n\} \ln a$$

$$\operatorname{arctg}\{x_n\} \sim \{x_n\} \qquad \ln(1 + x) \sim x$$

Si el $\lim_{n \to \infty} \{x_n\} = 1$ entonces podemos establecer las siguientes relaciones de equivalencias

$$\ln\{x_n\} \sim \{x_n\} - 1$$

$$\operatorname{tg}(\{x_n\} - 1) \sim \{x_n\}$$

$$\operatorname{sen}(\{x_n\} - 1) \sim \{x_n\}$$

POLINOMIO DE TAYLOR-FUNCIONES ELEMENTALES

$$T_{n,0}\, e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$T_{2n,0,}\, \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{(2n)}}{(2n)!}$$

$$T_{2n+1,0,}\, \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

$$T_{n,0,}\, \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{(n+1)} x^n}{n}$$

$$T_{m,1}\, \ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{(n+1)}(x-1)^n}{n}$$

$$T_{m,0}\, (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))x^n}{n!}$$

Se puede expresar también $T_{m,0,}(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n$

$$T_{2n+1,0,}\, \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$$

$$T_{2n+1,0,}\, \operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

NÚMEROS COMBINATORIOS

CÁLCULO:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{n!\,(n-\alpha)!}$$

PROPIEDADES

$\binom{\alpha}{0} = 1 \qquad \binom{\alpha}{1} = \alpha$

$\binom{\alpha}{\alpha} = 1$