

Sea $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

- Calcula:
- Pendiente de la recta tangente en $x=2$ (aplicando la definición).
 - Ecuación de la recta tangente
 - Ecuación de la recta normal.

a) (Es recomendable escribir la función como $f(x) = \frac{x}{e^x}$)

La pendiente de la recta tg en un punto viene dada por la expresión:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{siendo } f(x) = \frac{x}{e^x} \quad \text{y } a=2$$

Entonces:

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2+h}{e^{2+h}} - \frac{2}{e^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^2(2+h) - 2e^{2+h}}{e^2 \cdot e^{2+h}}}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^2(2+h) - 2e^{2+h}}{e^2 \cdot e^{2+h}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^2(2+h) - 2e^2 \cdot e^h}{e^2 \cdot e^{2+h} \cdot h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^2(2+h - 2e^h)}{e^2 \cdot e^{2+h} \cdot h} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

(separar exponentes) Factor común de e^2 y simplificar indeterminación aplique L'Hôpital

$$\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2e^h}{e^{2+h} + h e^{2+h}} = \underline{\underline{\frac{-1}{e^2}}}$$

b) Ecuación de la recta tangente:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

siendo: $f(x) = \frac{x}{e^x}$

$a=2$

$f(a) = f(2) = \frac{2}{e^2}$

$f'(a) = f'(2) = \frac{-1}{e^2}$

$$y - \frac{2}{e^2} = \frac{-1}{e^2}(x - 2)$$

c) Ecuación de la recta normal:

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$$

$$\rightarrow y - \frac{2}{e^2} = e^2(x - 2)$$

Recordar: La recta normal es la recta perpendicular a la

recta tangente, por tanto necesitamos un vector que sea perpendicular,

es decir que se cumpla que el producto escalar entre ambos vectores es igual a 0.

Si: Vector de la recta tg es $(1, f'(a))$ El vector de la recta normal es $(f'(a), -1)$

ya que $\underbrace{(1, f'(a)) \cdot (f'(a), -1)}_{\text{Producto escalar}} = 0$

$1 \cdot f'(a) + f'(a)(-1) = 0$

$0 = 0$