

48.c) Relación de ejercicios tema 1.

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sinh x) \cdot \lg x}{(e^x - 1) \sinh x + x \ln(1-x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$ (Indeterminación). Podemos resolverlo por L'Hôpital o con infinitésimos equivalentes (usaremos esta 2ª opción para la resolución del ejercicio)

Polinomios de Taylor (Anotamos varios términos, a priori no sabemos hasta qué grado nos hace falta)

Para hallar $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \\ e^{-x} &= 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} + \frac{(-x)^5}{5!} \\ \hline &= \frac{2x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{2} \end{aligned}$$

Por tanto: $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

$\Leftarrow \sinh(x) \sim x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \Rightarrow$ Como tenemos $(x - \sinh(x))$ entonces $x - x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$

$$\lg(x) \sim x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

$$\sinh(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \Rightarrow \text{Como tenemos } (e^x - 1) \text{ entonces } e^x - 1 \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots - 1$$

$$\ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Como tenemos $\ln(1-x)$ entonces

$$\text{Por tanto: } (e^x - 1) \sim x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\ln(1+(-x)) \sim (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \frac{(-x)^4}{4} + \dots$$

Ahora debemos hacer varios productos de Cauchy, estos son: $(e^x - 1) \otimes \sinh x$ y $(x - \sinh x) \otimes \lg x$

$\uparrow$ (Notación producto de Cauchy o convolución)

• Para $(e^x - 1) \otimes \sinh x$:

$$(e^x - 1) = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$(\sinh x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\hline x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} *$$

"grado cero": No tenemos nada

"grado uno": No tenemos nada

$$\text{"grado dos": } \frac{x + \frac{x^2}{2!}}{x^2}$$

$$\text{"grado tres": } \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}}{x - \frac{x^3}{3!}} = \left(1 \cdot \frac{1}{2!}\right) \cdot x^3$$

$$\text{"grado cuatro": } \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}}{x - \frac{x^3}{3!}} = \left(1 \cdot \frac{1}{3!} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{3!}\right)\right) \cdot x^4$$

o no hay término x^4

$$\text{"grado cinco": } \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}} = \left(1 \cdot \frac{1}{4!} + 1 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{1}{3!}\right)\right) x^5 = -\frac{1}{24} x^5$$

• Para $(x - \sinh(x)) \otimes \operatorname{tg}(x)$

$$(x - \sinh(x)) \sim 0 - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}$$

$$\operatorname{tg}(x) \sim \frac{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5}{- \frac{1}{3!}x^4 *}$$

Volvemos al cálculo del límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sinh(x)) \cdot \operatorname{tg} x}{(e^x - 1) \operatorname{sen} x + x e^x (1 - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3!}x^4}{x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} + x(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3!}x^4}{\cancel{x^2} - \cancel{\frac{x^3}{2}} - \frac{x^5}{24} - \cancel{x^2} - \cancel{\frac{x^3}{2}} - \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4}} =$$

Observación importante: cualquier polinomio es de grado mayor que cuatro, por tanto ya no nos interesan.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3!}x^4}{-\frac{x^4}{3} - \frac{7}{24}x^5} = \frac{-\frac{1}{3!}}{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Son grados mayores, tampoco nos interesan

Antes de concluir que el límite es $\frac{1}{2}$ debemos comprobar que todos los polinomios de Taylor que hemos preparado lleguen al menos hasta grado 4 (los marco con * para concluir que la comprobación se ha realizado)

grado cero: No hay

grado uno: $\frac{0}{(0 \cdot 1) \cdot x}$ (No hay)

grado dos: No hay

grado tres: $\frac{-\frac{x^3}{3!}}{x + \frac{x^3}{3}}$
No hay

grado cuatro: $\frac{-\frac{x^3}{3!}}{x + \frac{x^3}{3}}$

grado cinco: $\frac{-\frac{1}{3!}x^4}{-x^3 - \frac{x^5}{5!}}$

$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5$
No hay