

Febrero 2020

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} \cdot e^x - 1 - \frac{\sin x}{2}}{\ln(1+x) - \sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) \quad (\text{Aplicamos infinitésimos equivalentes, para ello preparamos las funciones antes!})$$

(En $x=0$):

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad * \Rightarrow \frac{\sin x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^5}{240} \quad *$$

$$\ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \quad *$$

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \quad *$$

$$\sqrt{1-x} = (1+(-x))^{1/2} \quad \text{Como } (1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 \\ = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3$$

$$\text{Entonces } (1+(-x))^\alpha = 1 + \alpha(-x) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(-x)^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}(-x)^3$$

$$\text{En particular } (1+(-x))^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3$$

$$\text{Por tanto } (1+(-x))^{1/2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} \quad *$$

Ahora debemos hacer el producto de Cauchy de $\sqrt{1-x}$ con e^x , vamos a ello:

$$\sqrt{1-x} \sim 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}$$

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{13}{48} x^3$$

*

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} \cdot e^x - 1 - \frac{\sin x}{2}}{\ln(1+x) - \sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12}}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^3}{3!}} = \frac{-1/8}{-1/2} = 1/4$$

Necesito hasta grado 2, antes de concluir de lo
 revisar si he tenido en cuenta hasta ese grado en
 las funciones elementales. (señalo la comprobación con *)

Grado cero:

$$\frac{1}{1}$$

Grado uno:

$$\frac{1 - \frac{x}{2}}{1 + x}$$

$$\left(1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\right) x$$

$1/2$

Grado dos:

$$\frac{1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}}{1 - x + \frac{x^2}{2!}}$$

$$\left(1 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2!} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) x^2$$

Grado tres:

$$\frac{1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}}$$

$$\left(1 \cdot \left(-\frac{1}{16}\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{3!}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2!}\right)\right) x^3$$

$-13/48$