

Estimar seno de 1 radian con un error menor de 10^{-4} .

Datos: $f(x) = \sin x$
 $x = 1$
 $x_0 = 0$
 con $0 < c < 1$

Teorema de Taylor:

$$E_{n, x_0} f(x) = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right|$$

$f(x) = \sin x$; $f(c) = \sin c = f^{(0)}(c)$
 $f'(x) = \cos x$; $f'(c) = \cos c = f^{(1)}(c)$
 $f''(x) = -\sin x$; $f''(c) = -\sin c = f^{(2)}(c)$
 $f'''(x) = -\cos x$; $f'''(c) = -\cos c = f^{(3)}(c)$
 (Repite ciclo)

$\Rightarrow$ Es indiferente qué tomar como $f^{(n+1)}(c)$ ya que siempre se encontrará acotada entre $[-1, 1]$. Adaptamos por comodidad $f^{(n+1)}(c) = \sin c$

Por tanto:

$$E_{n, 0, \sin 1} = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (1 - 0)^{n+1} \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| < \left| \frac{1}{(n+1)!} \right|$$

$0 < c < 1$
 $0 = \sin 0 < \sin c < \sin 1 < 1$

ERROR QUE NOS DIO EL ENUNCIADO

$10.000 < (n+1)!$
 Para $n=0$ $0.10.000 < (0+1)!$? No
 Para $n=1$ $0.10.000 < (1+1)!$? No
 Para $n=2$ $0.10.000 < (2+1)!$ No
 $\vdots$
 Para $n=6$ $0.10.000 < (6+1)! = 5040$ No
 Para $n=7$ $0.10.000 < 8! = 40.320$ Si

Para conseguir un error menor de 10^{-4} de seno de 1 radian necesito el siguiente polinomio de Taylor:

$$T_{7, 0, \sin x} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$\uparrow$ (2n+1) $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$

Observación: $2n+1=7$
 $n=4$

(4 términos del polinomio de Taylor de la función $\sin x$ centrado en $x=0$)
 (Esta observación es útil para el tema 4)

Para estimar el error:

$$T_{7, 0, \sin 1} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = 0.841468254$$

Con calculadora: 0.8414709848

OBSERVACIÓN IMPORTANTE: si para $n=6$ cumple la desigualdad tendríamos que usar un polinomio de grado 7 igualmente (recuerda que no tenemos grado 6 en la función $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$)

He conseguido hasta 4 cifras significativas!

(Una más de las que me pedían $10^{-4} = \frac{1}{10.000} = 0.0001$)

Otra forma de realizar este ejercicio (ya que desconocemos $f^{(n+1)}$) es ir probando, es decir:

¿Tendré con $T_{5,0,\sin x}$ un error menor de 10^{-4} del valor verdadero de $\sin 1$?

Veamos:

$$\left| \begin{array}{l} f(x) = \sin x \\ x = 1 \\ x_0 = 0 \\ 0 < c < 1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} f(x) = \sin x \\ f''(x) = -\sin x; f''(c) = -\sin c \end{array} \right|$$

$$E_{n,x_0} f(x) = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right|$$

$$E_{5,0,\sin 1} = \left| \frac{f^{(5+1)}(c)}{(5+1)!} (1-0)^{(5+1)} \right| =$$

$$= \left| \frac{-\sin c}{6!} \right| = \frac{\sin c}{6!} < \frac{1}{6!} < \frac{1}{10.000}$$

$$0 < c < 1$$

$$0 < \sin c < 1$$

$$\text{¿ } 10.000 < 6! = 720? \text{ No}$$

Conclusión: con un polinomio de grado 5 no conseguía lo pedido. Por tanto puedo probar con el siguiente grado es decir: polinomio de grado 7 (Recordemos que grado 6 no existe para la función seno)

Repetimos la pregunta:

¿Con $T_{7,0} \sin x$ conseguiré un error menor de 10^{-4} de $\sin 1$?

$$f(x) = \sin x$$

$$x = 1$$

$$x_0 = 0$$

$$f^{VIII}(x) = \sin x; \quad f^{VIII}(c) = \sin c$$

Entonces:

$$E_{7,0,\sin 1} = \left| \frac{f^{(7+1)}(c)}{(7+1)!} (1-0)^{(7+1)} \right| = \left| \frac{\sin(c)}{8!} \right| < \left| \frac{1}{8!} \right| =$$

$\uparrow$
 $0 < c < 1$
 $0 < \sin c < 1$

$$= \frac{1}{8!} < \frac{1}{10.000} \quad ; \quad ¿10.000 < 8! = 40.320? \quad \underline{\underline{Si}}$$

Concluimos que necesitamos

$$T_{7,0} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \quad \text{para conseguir}$$

un error menor de 10^{-4} de $\sin$ de 1 siendo la estimación:

$$T_{7,0} \sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}$$