

48.b) Calcular $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \left(\frac{0}{0} \right)$ Aplicamos infinitésimos equivalentes con ayuda del Polinomio de Taylor.

Identificamos las funciones

En $x=0$

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} *$$

$$\text{Entonces } \sin^2 x = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{x^2 - \frac{x^4}{3}}$$

$$\begin{array}{l} \text{grado cero: nada} \\ \text{grado uno: } \frac{x}{x} \\ \text{grado dos: } \frac{x}{(1.1)x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{grado tres: } \frac{x - \frac{x^3}{3!}}{x - \frac{x^3}{3!}} \\ \text{grado cuatro: } \frac{x - \frac{x^3}{3!}}{\left(1 \cdot \left(-\frac{1}{3!} \right) + \left(1 \cdot \left(-\frac{1}{3!} \right) \right) \right) x^4} = -\frac{1}{3} \end{array}$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x) - x^2}{x^2 \sin^2(x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} - \frac{x^4}{3} - \cancel{x^2}}{x^2 \left(x^2 - \frac{x^4}{3} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{3}}{x^4 - \frac{x^6}{3}} = -\frac{1}{3}$$

↑
Antes de concluir que el límite es $-\frac{1}{3}$ debemos comprobar que hemos considerado hasta grado 4. (Marcas con * por la comprobación)