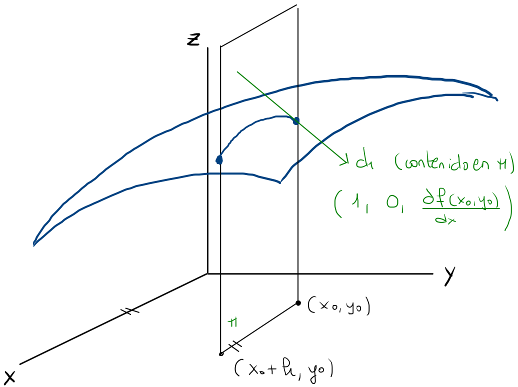
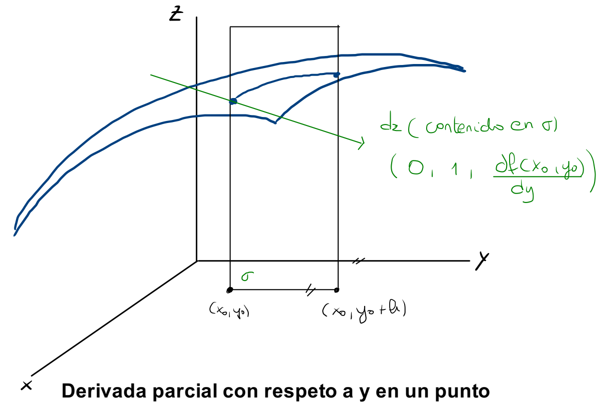
DERIVADAS PARCIALES



Derivada parcial con respeto a x en un punto

$$\boxed{\frac{df}{dx}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}}$$

(Pendiendiente de la supercie en la dirección x)



Derivada parcial con respeto a y en un punto

$$\boxed{\frac{df}{dy}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}}$$

(Pendiendiente de la supercie en la dirección y)

Ecuación cartesiana del plano tangente:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-f(x_0,y_0) \\ 1 & 0 & \frac{\delta f}{dx}(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & \frac{\delta f}{dy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = 0$$

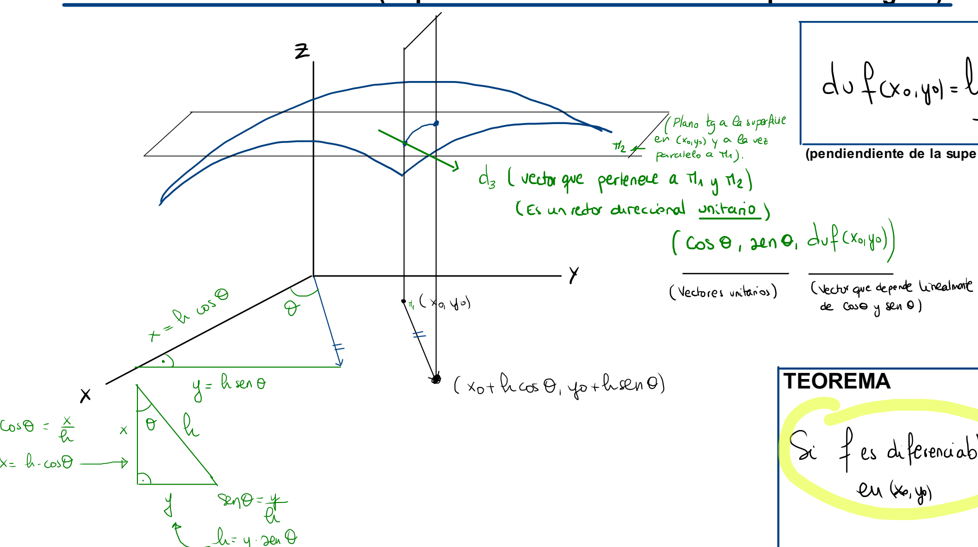
Si desarrollamos el determinante tenemos que

$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + \frac{\delta f}{dx}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\delta f}{dy}(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

Si la superficie está dada de forma implícita "$F(x,y,z)=0$" la ecuación del plano tangentes es:

$$\boxed{\frac{\delta f}{dx}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\delta f}{dy}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\delta f}{dz}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0}$$

DERIVADA DIRECCIONAL (depende de una dirección dada por un ángulo)



$$\boxed{d_u f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h\cos\theta,\ y_0+h\,sen\,\theta) - f(x_0,y_0)}{h}}$$

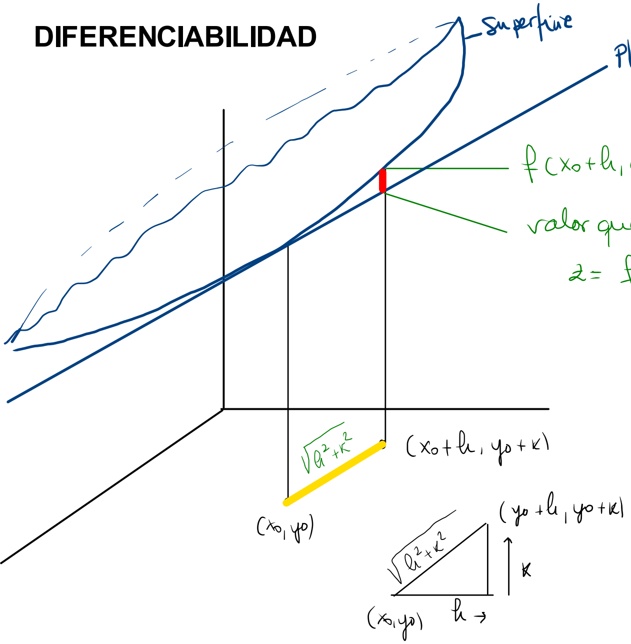
(pendiendiente de la supercie en una dirección unitaria)

TEOREMA

Si f es diferenciable en (x_0,y_0) $\Rightarrow$ $D_u f(x_0,y_0) = \underbrace{\vec{\nabla} f(x_0,y_0)\cdot\vec{u}}$

Producto escalar entre el gradiente de la función en (x_0,y_0) y el vector director unitario

DIFERENCIABILIDAD



$f(x_0+h, y_0+k)$ (valor sobre la superficie)

valor que toma sobre el plano tangente

$$z = f(x_0+y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\underbrace{(x-x_0)}_{h} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\underbrace{(y-y_0)}_{k}$$

Es diferenciable cuando la relación entre el color rojo y el amarillo tiende a cero. Esto indica que la superficie es "suavita" y por tanto podemos construir un plano tangente sobre ese punto, es decir

es diferenciable si el $\lim\limits_{(h,k)\to(x_0,y_0)} \frac{\text{rojo}}{\text{amarillo}} = 0$

Es decir:

$$\lim_{(h,k)\to(x_0,y_0)} = \frac{\overbrace{f(x_0+h, y_0+k)}^{\text{Valor de ese punto sobre la superficie}} - \overbrace{\left[f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k\right]}^{\text{Valor de ese punto sobre el plano tangente}}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Usaremos:

Es diferenciable si:

$$\boxed{\lim_{(h,k)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0}$$

RELACIONES NOTABLES:

- Si f es diferenciable en $(x_0, y_0) \Longrightarrow f$ es continua en (x_0, y_0)

- Si f es diferenciable en $(x_0, y_0) \Longrightarrow \exists\ D_u f(x_0, y_0)$

- Si f es diferenciable en $(x_0, y_0) \Longrightarrow \exists\ \dfrac{\delta f}{dx}(x_0, y_0)\ ,\ \dfrac{\delta f}{dy}(x_0, y_0)$

- Si f es continua en (x_0, y_0) y además $\dfrac{\delta f}{dx}(x_0, y_0)$ y $\dfrac{\delta f}{dy}(x_0, y_0)$ son continuas

  en un entorno de $(x_0, y_0) \Longrightarrow f$ diferenciable en (x_0, y_0)

Nota: lo usaremos poco, siempre comprobaremos si es diferenciable con la definición (se usará prácticamente sólo para campos vectoriales)

Importante: Los recíprocos no son ciertos

$\not\Longleftarrow$