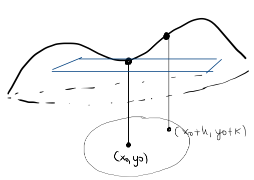
EXTREMOS CAMPOS ESCALARES

Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, (x_0, y_0) es mínimo local si existe un entorno de (x_0, y_0) de manera que $\forall\, (x_0+h, y_0+k)$ se tiene $f(x_0, y_0) \leq f(x_0+h, y_0+k)$

De manera análoga : (x_0, y_0) es máximo local si existe un entorno de (x_0, y_0) de manera que $\forall\, (x_0+h, y_0+k)$ se tiene $f(x_0, y_0) \geq f(x_0+h, y_0+k)$

Gráficamente:



(x_0, y_0) es mínimo local ya que $f(x_0, y_0) \leq f(x_0+h, y_0+k)$

Además, se puede construir un plano tg en (x_0, y_0) que es horizontal

Poder construir un plano tg horizontal en (x_0, y_0) indica que las derivadas parciales toman valor cero, es decir:

$$\boxed{\text{Si } (x_0, y_0) \text{ es extremo entonces } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0}$$

Por tanto, para identificar los puntos críticos se debe resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Obtendremos (x_0, y_0) (Puntos críticos) que procederemos a clasificar (entre varias técnicas posibles usaremos el determinante Hessiano).

Clasificación de extremos escalares con determinante Hessiano.

Teorema:

Sea f(x,y) diferenciable y sea (x_0, y_0) un punto crítico. Sea G(x,y) el determinante Hessionano definida como:

$$G(x,y) := \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x,y) & \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(x,y) \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x,y) & \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x,y) \end{vmatrix}$$

Entonces se tiene que:

- **Si $G(x_0, y_0) > 0$ y** $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x_0, y_0) > 0 \Longrightarrow$ **mínimo**
- **Si $G(x_0, y_0) > 0$ y** $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x_0, y_0) < 0 \Longrightarrow$ **máximo**
- **Si $G(x_0, y_0) < 0$** $\Longrightarrow$ **punto silla**
- **Si $G(x_0, y_0) = 0$ (no aporta información)**

Extremos escalares (sujeto a condiciones)

Multiplicadores de Lagrange

Muchos problemas de optimización presentan restricciones o ligaduras en los valores de las variables, para su resolución nos ayudaremos del Teorema de Lagrange.

Teorema de Lagrange:

Sea f(x,y) con primeras derivadas continuas. Sea una superficie con G(x,y)=0 en el dominio de f que pasa por (x_0, y_0) de

manera que $\frac{\delta G}{\delta x}(x_0,y_0) \neq 0$ y $\frac{\delta G}{\delta y}(x_0,y_0) \neq 0$ **Entonces, si f es restringida a los puntos de G presenta extremos en (x_0, y_0)**

y se tiene:

$$\left(\frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0) \,,\, \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0) \right) = \lambda \left(\frac{\delta G}{\delta x}(x_0,y_0) \,,\, \frac{\delta G}{\delta y}(x_0,y_0) \right)$$

Para hallar los puntos críticos (x_0, y_0) se establece el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\delta f}{\delta x}(x,y) - \lambda \frac{\delta G}{\delta x}(x,y) = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta y}(x,y) - \lambda \frac{\delta G}{\delta y}(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{array}\right\}$$

En la práctica, para resolver este tipo de cuestiones utilizaremos la Ecuación Lagrangiana:

$$\boxed{L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda G(x,y)}$$

Entonces, tendremos de nuevo 3 ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\delta L}{\delta x}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta y}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda}(x,y,\lambda) = 0 \end{array}\right.$$