

2. Dado el campo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

En el punto (0,0), estudiar:

- (a) continuidad
- (b) existencia de derivadas parciales
- (c) existencia de derivada direccional en la dirección  $\vec{v} = (1,-1)$
- (d) diferenciabilidad

a)  $f(x,y)$  es continua si  $f(0,0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$  Veámoslo:

•  $f(0,0) = 0$

•  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot (mx)^2}{x^2 (mx)^2 + (x-mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^4}{m^2 x^4 + x^2 + m^2 x^2 - 2mx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^4}{x^2 (m^2 x^2 + 1 + m^2 - 2m)} =$

$\boxed{y=mx}$   
Observación: trayectoria que pasa por (0,0) y  $\in \mathbb{D} \cup f$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^2}{\underbrace{m^2 x^2 + 1 + m^2 - 2m}_{\substack{\text{El menor \textsuperscript{+} es grado cero es decir} \\ m^2 \cdot x^2 + 1 \cdot x^2 + m^2 \cdot x^2 - 2mx^2}}} = 0$$

ojo || que el límite de valor 0 con una trayectoria NO significa nada!!!  
ya que sólo se puede afirmar el valor del límite con la definición o Teorema de anulación.

Cogemos una nueva trayectoria a ver qué ocurre:

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^2 \cdot x^2 + (x-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 1$

$\boxed{y=x}$

|| Si con 1 trayectoria obtengo 0 y con otra trayectoria obtengo 1, entonces el límite NO existe

Solución: Como  $f(0,0) = 0$  y el  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$  no existe entonces  $f(x,y)$  NO es continua.

Que  $f(x,y)$  no sea continua arroja un Resultado inmediato: no tiene sentido estudiar la diferenciabilidad (apartado d)  
(Por tanto vamos directamente a contestar el apartado d)

d) Como  $f(x,y)$  no es continua no tiene sentido estudiar la diferenciabilidad, la función no es diferenciable.

b) A pesar de ser continua, si podemos estudiar las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 \cdot 0}{h^2 \cdot 0 + (h-0)^2} - 0}{h} = 0 \neq$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot h^2}{0 \cdot h^2 + (h-0)^2} - 0}{h} = 0 \neq$$

Solución:  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$

(sin sustituir  $h$  aún todo este sustrato es cero por tanto no es una indeterminación, el valor del límite es cero)

c) Al igual que con el apartado b, a pesar de no ser continua podemos estudiar las derivadas direccionales

go (Como  $f(x, y)$  no es diferenciable no se puede utilizar el teorema, necesariamente el estudio de las derivadas direccionales tiene que ser con la definición)

Dirección:  $(1, -1)$ , El vector unitario es  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  que si racionalizamos

$$\vec{V}_u = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\frac{\partial f_u}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h\cos\theta, y_0+h\sin\theta) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h\cos\theta, h\sin\theta) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}h)^2 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}h)^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2}h)^2 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}h)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}h - (-\frac{\sqrt{2}}{2}h))^2} - 0}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2}{4}h^2\right) \cdot \left(-\frac{2}{4}h^2\right)}{\left(\frac{2}{4}h^2\right) \cdot \left(-\frac{2}{4}h^2\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}h - \frac{\sqrt{2}}{2}h\right)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^4}{4} + \left(\frac{2}{4}h^2 + \frac{2}{4}h^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}h^2\right)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^4}{4}}{h\left(\frac{h^3}{4} + 2h^2\right)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{4} + 2h^2} = 0 \neq$$

Solución:  $\frac{\partial f_u}{\partial x}(1, -1) = 0$ .