PROPIEDADES DEL OPERADOR "SUMA"

ASOCIATIVA $\sum_{k=1}^{8} k = \sum_{k=1}^{4} k + \sum_{k=4}^{8} k$

CONMUTATIVA $\sum_{k=1}^{4} (k+1) = \sum_{k=1}^{4} k + \sum_{k=1}^{4} 1$

DISTRIBUTIVA $\sum_{k=1}^{5} c \cdot k = c \cdot \sum_{k=}^{5} k \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN: n-ésima suma parcial

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots)$ una sucesión arbitraria e infinita

Se denota $\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_n}$ como la n-ésima suma parcial

---

Definición: serie

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \ldots\ldots)$ sucesión infinita. Una serie es una sucesión de todas las sumas parciales de a_n, es decir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n$

DEFINICIÓN: Si $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, es decir si $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y se cumple $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n}$

TEOREMA: Condición necesaria

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie, si la serie converge entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

El Recíproco no es cierto. (Si el $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ NO podemos afirmar que la serie es convergente pero si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ SI podemos afirmar que la serie diverge).

Teorema

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, *y* c *es un número real, entonces:*

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot A \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$$

Teorema

Para cualquier entero positivo N, *las series:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad y \qquad \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

tienen el mismo carácter (las dos convergen, o ambas divergen).

Teorema

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *dos series, y sea* $c \neq 0$ *un número real.*

1. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ *también diverge.*
2. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *diverge.*

DEFINICIÓN: Series armónicas o p-series

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}}$$

Si $p=1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serie armónica

Si $p \neq 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ p-serie.

Si $p \leq 1$ entonces la serie diverge

Si $p > 1$ entonces la serie converge.

Nota: $p>0$ en todos los casos.

RELACIÓN DE ORDEN

$$\boxed{\ln n < n < \underset{p>0}{n^p} < \underset{k>0}{k^n} < n! < n^n}$$

Deficinión: serie geométrica

$$\boxed{\sum_{n=N}^{\infty} a \cdot r^n}$$

($a \neq 0$ N puede empezar en cero)

- Converge si $|r|<1$
- Para sumarla: $\boxed{S = \frac{a_N}{1-r}}$ siendo a_N el primer término de la serie.

Deficinión: serie aritmético- geométrica

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (an+b) \cdot r^n}$$

($a \neq 0$)

- converge si $|r|<1$
- Para sumarla: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (an+b) \cdot r^n = \frac{(a+b)\cdot r - br^2}{(1-r)^2}}$

Deficinión: serie hipergeométrica

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie hipergeométrica si al hacer $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ podemos identificar α, β, γ

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}}$$

- converge si $\gamma > \alpha + \beta$
- Para sumarla: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1 \cdot \gamma}{\gamma - \alpha - \beta}}$