

## PROPIEDADES DEL OPERADOR "SUMA"

ASOCIATIVA  $\sum_{k=1}^8 K = \sum_{k=1}^4 K + \sum_{k=4}^8 K$

CONMUTATIVA  $\sum_{k=1}^4 (K+1) = \sum_{k=1}^4 K + \sum_{k=1}^4 1$

DISTRIBUTIVA  $\sum_{k=1}^5 c \cdot K = c \cdot \sum_{k=1}^5 K \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$

## DEFINICIÓN: n-ésima suma parcial

Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$  una sucesión arbitraria e infinita

Se denota  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$  como la n-ésima suma parcial

## Definición: serie

Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots)$  sucesión infinita. Una serie es una sucesión

de todas las sumas parciales de  $a_n$ , es decir  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n$

DEFINICIÓN: Si  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente, es decir si  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  existe, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente y se

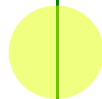
cumple  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$



## TEOREMA: Condición necesaria

Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie, si la serie converge entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

El recíproco no es cierto. ( Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  NO podemos afirmar que la serie es convergente pero si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  SÍ podemos afirmar que la serie diverge).



## Teorema

Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ , y  $c$  es un número real, entonces:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot A$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$$

## Teorema

Para cualquier entero positivo  $N$ , las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad y \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

tienen el mismo carácter (las dos convergen, o ambas divergen).

## Teorema

Sean  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  dos series, y sea  $c \neq 0$  un número real.

① Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$  también diverge.

② Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  diverge.

## RELACIÓN DE ORDEN

$$\ln n < n < n^p < n^k < n! < n^n$$

$p > 0 \quad k > 0$

## DEFINICIÓN: Series armónicas o p-series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Si  $p=1$  entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  serie armónica  
 Si  $p \neq 1$  entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  p-serie.

Si  $p \leq 1$  entonces la serie diverge  
 Si  $p > 1$  entonces la serie converge.

Nota:  $p > 0$  en todas las casos.

## Definición: serie geométrica

$$\sum_{n=N}^{\infty} a \cdot r^n$$

( $a \neq 0$   $N$  puede empezar en cero)

● converge si  $|r| < 1$

● Para sumarla:  $S = \frac{a_N}{1-r}$  siendo  $a_N$  el primer término de la serie.

## Definición: serie aritmético-geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b) \cdot r^n$$

( $a \neq 0$ )

● converge si  $|r| < 1$

● Para sumarla:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b) \cdot r^n = \frac{(a+b) \cdot r - br^2}{(1-r)^2}$$

## Definición: serie hipergeométrica

Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es una serie hipergeométrica si al hacer  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  podemos identificar  $\alpha, \beta, \gamma$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \gamma}$$

● converge si  $\gamma > \alpha + \beta$

● Para sumarla:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1 \cdot \gamma}{\gamma - \alpha - \beta}$$