Integrales de línea: definición

Definición

Sea $\mathcal{C}$ *un camino regular dado por* $\mathcal{C} \equiv \vec{\alpha} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *y sea* $\vec{f}$ *un campo vectorial definido sobre un subconjunto* A *de* $\mathbb{R}^n$ *que contenga a* $\mathcal{C}$, $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. *Se define* **integral de línea** *o* **circulación** *de* $\vec{f}$ *a lo largo de* $\vec{\alpha}$ *y se representa por* $\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha}$ *a*

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha} = \int_a^b \vec{f}[\vec{\alpha}(t)] \cdot \vec{\alpha}'(t)\,\mathrm{d}t$$

siempre que la integral del segundo miembro exista.

Además, si el camino es cerrado, denotaremos a la integral de línea como

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha}$$

Notación en $\mathbb{R}^2$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha} = \int_a^b \vec{f}[\vec{\alpha}(t)] \cdot \vec{\alpha}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

donde $\mathrm{d}x \equiv x'(t)\,\mathrm{d}t$; $\mathrm{d}y \equiv y'(t)\,\mathrm{d}t$.

Notación en $\mathbb{R}^3$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha} = \int_a^b P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

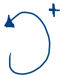
donde $\mathrm{d}x \equiv x'(t)\,\mathrm{d}t$; $\mathrm{d}y \equiv y'(t)\,\mathrm{d}t$; $\mathrm{d}z \equiv z'(t)\,\mathrm{d}t$.

PROPIEDADES INTEGRAL DE LÍNEA:

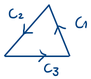
1. Regla del múltiplo constante: $\int_C K\vec{f}\,d\vec{\alpha} = K\int_C \vec{f}\,d\vec{\alpha} \qquad K\in\mathbb{R}$

2. Regla de la suma: $$\int_C (\vec{f}_1+\vec{f}_2)\,d\vec{\alpha} = \int_C \vec{f}_1\,d\vec{\alpha} + \int_C \vec{f}_2\,d\vec{\alpha}$$

3. Regla de la dirección opuesta: $$\int_{-C} = -\int_C$$



4. Regla de la subdivisión: $$\int_C \vec{f}\,d\vec{\alpha} = \int_{C_1} \vec{f}\,d\vec{\alpha} + \int_{C_2} \vec{f}\,d\vec{\alpha} + \int_{C_3} \vec{f}\,d\vec{\alpha}$$



Nota: consultar video "integral de línea: resolución aplicando la definición

minuto 30´12" para ver aplicadas las propiedades 3 y 4 en un ejemplo.

Teorema (de Green-Riemann)

Sean $P(x,y)$, $Q(x,y)$ campos escalares derivables con continuidad en un conjunto $\mathcal{S}$ abierto del plano XY. Sea $\mathcal{C}$ una curva de Jordan regular a trozos y sea $\mathcal{T}$ el recinto de $\mathbb{R}^2$ encerrado por $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{T}} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

donde $\mathcal{C}$ se recorre en sentido positivo.

OBSERVACIÓN:

Podemos aplicar el Teorema de Green si:

la curva es cerrada y con orientación positiva, es decir $\circlearrowleft$ +

Teorema FUNDAMENTAL DE LA INTEGRAL DE LÍNEA

Sea $\vec{f}(x_1, \ldots, x_n)$ una función vectorial definida sobre un conjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ convexo y $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ una curva de $\mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *$\vec{f}$ es conservativo.* **(Forma diferencial exacta)**
2. *$\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha}$ no depende del camino elegido entre los puntos A y B de $\mathcal{D}$. Además*
$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha} = U(B) - U(A)$$
siendo U la función potencial de $\vec{f}$.
3. *$\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{\alpha} = 0$ para todo camino $\mathcal{C}$ cerrado.*

Caracterización de los campos conservativos

Teorema 2. *Sea* $\vec{f}:\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *el campo vectorial con* $\mathcal{D}$ *convexo, tal que existen las primeras derivadas parciales y son continuas. Entonces:*

Campo conservativo en $\mathbb{R}^2$

$$\vec{f}(x,y,z) = P(x,y)\vec{\imath}+Q(x,y)\vec{\jmath} \text{ es conservativo} \iff \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Campo conservativo en $\mathbb{R}^3$

$$\vec{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath}+Q(x,y,z)\vec{\jmath}+R(x,y,z)\vec{k} \quad \text{es conservativo}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} \end{cases}$$

Construcción del potencial en $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{\begin{array}{l} U(x,y) = \displaystyle\int P(x,y)\,\mathrm{d}x + \phi(y) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} U(x,y) = \displaystyle\int Q(x,y)\,\mathrm{d}y + \phi(x) \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \end{array}}$$

Construcción del potencial en $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{\begin{array}{l} U(x,y,z) = \displaystyle\int P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \Phi(y,z) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z) \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z) \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} U(x,y,z) = \displaystyle\int Q(x,y,z)\,dy + \phi(x,z) \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,y,z) \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z) \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} U(x,y,z) = \displaystyle\int R(x,y,z)\,dz + \phi(x,y) \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,y,z) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z) \end{array}}$$

ACLARACIONES IMPORTANTES PARA RESOLVER UNA INTEGRAL DE LÍNEA:

- Si la solucionamos a través de la definición nos hace falta la parametrización de la curva.

- Si la curva es cerrada y con orientación positiva es posible aplicar el Teorema de Green .

- Si el campo vectorial es conservativo (forma diferencial exacta) podemos aplicar teorema fundamental de la integral de línea (resolución con la función potencial)

- Si el campo vectoriral es conservativo y la curva es cerrada podemos aplicat teorema fundamental de la integral de línea y afirmar que el valor de esa integral es cero.