

(b) Dado el campo $\vec{F}(x, y, z) = (\overbrace{3xy^2z^2 + y \operatorname{sen} x}^P, \overbrace{3x^2yz^2 - \cos x}^Q, \overbrace{3x^2y^2z}^R)$ y el camino C con parametrización $\vec{\alpha}: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{\alpha}(t) = (t, -\cos t, \sqrt{\pi t})$ calcula $\int_C \vec{F}(x, y, z) d\vec{\alpha}$.

1.) Comprobemos si $\vec{F}$ es conservativo.

$$\begin{cases} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x} & ; & 6xz^2y + \operatorname{sen} x & (\text{ambas derivadas coinciden}) \checkmark \\ \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} & ; & 6xy^2z & \checkmark \\ \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y} & ; & 6x^2yz & \checkmark \end{cases}$$

Es conservativo. $\Rightarrow$ Puedo aplicar Teorema fundamental para la integral de línea.

$$\text{Por tanto } \int_C \vec{F} d\vec{\alpha} = U(F) - U(I)$$

Vamos a hallar quien es el punto inicial y punto final del camino parametrizado:

$$\text{Dado } \vec{\alpha}: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{\alpha}(t) = (t, -\cos t, \sqrt{\pi t})$$

$$\text{Punto inicial: } \alpha(0) = (0, -1, 0)$$

$$\text{Punto final: } \alpha(\pi) = (\pi, 1, \pi)$$

Construimos función potencial:

$$U(x, y, z) = \int P(x, y, z) dx + \phi(y, z) = \int (3xy^2z^2 + y + \sin x) dx + \phi(y, z) = \\ = \frac{3}{2} x^2 y^2 z^2 - y \cos x + \phi(y, z)$$

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} = Q(x, y, z) ; \quad \cancel{3x^2 y z^2} - \cos x + \phi'(y, z) = \cancel{3x^2 y z^2} - \cos x$$

$$\boxed{\phi(y, z) = \int 0 dy + \varphi(z)}$$

! Muy importante, hay que hallar $\varphi(z)$ que no tiene porque ser cero también.

$$\text{Tenemos que: } U(x, y, z) = \frac{3}{2} x^2 y^2 z^2 - y \cos x + \varphi(z)$$

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} = R(x, y, z) ; \quad \cancel{3x^2 y^2 z} + \varphi'(z) = \cancel{3x^2 y^2 z} \\ \varphi'(z) = 0$$

$$\text{La función potencial es } U(x, y, z) = \frac{3}{2} x^2 y^2 z^2 - y \cos x$$

$$\text{Punto final } (\pi, 1, \pi) \Rightarrow U(\pi, 1, \pi) = \frac{3}{2} \pi^4 - \cos \pi$$

$$\text{Punto inicial } (0, -1, 0) \Rightarrow U(0, -1, 0) = 1$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{a} = U(\mp) - U(\pm) = \frac{3}{2} \pi^4 - \cos \pi - 1.$$

Solución