(0,5) **1. Cálcula** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{-x}(1-\cos x)}{x\cdot \operatorname{sen} x}$ (SOBRE 11 puntos)

(1) **2. Calcula** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ **con un error menos de** 10^{-2}

(1) **3. Halla los valores máximos y mínimos de** $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ **sujeto a la restricción x + y = 1 con** $x \geq 0$ e $y \geq 0$

4. Sea f (x,y) = $\begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(0,5) **a.) Demuestra que f(x,y) no es continua**

(0,25) **b.) ¿Es diferenciable? Justifica tu respuesta**

5. Sea f (x, y) = $\begin{cases} \dfrac{4x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a.) Estudia la continuidad (0,25)
b.) Estudia las derivadas parciales (0,25)
c.) Estudia la diferenciabilidad (0,5)
d.) Estudia las derivadas direccionles en cualquier dirección. (0,5)
e.) Estudia la derivada direccional en la dirección (1,-1) (0,25)

6. Sea el volumen generado al girar la región comprendida entre la parábola $x = y^2 + 1$ **y la recta x=3 alrededor de la recta x=3**

(0,5) **a.) Plantea (sin solucionar) el volumen de dicha figura por el método de los discos**

(0,5) **b.) Plantea (sin solucionar) el volumen de dicha figura por el método de las capas**

7. Sea $\iint_R$ **f(xy) dA siendo R la región comprendida enre f(x)=** x^4 **y g(x)=** x^3

(0,5) **a.) Plantea (sin solucionar) dicha integral doble en un dominio tipo I**

(0,5) **b.) Plantea (sin solucionar) dicha integral doble en un dominio tipo II**

(1) **8. Calcula** $\oint_C (xy + e^{x^2})\,dx + (x^2 - \ln(1+y))\,dy$

siendo c la curva del primer cuadrante, con orientación positiva formada por la región limitada por

$x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=9$. **(Resolver hasta el final)**

(0,75) **9. Sea I =** $\oint_C (2xy)\,dx - (1-x^2)\,dy$ **siendo c** $x^2+y^2-2x+4y+3=0$

¿Es cierta la siguiente afirmación? "El valor de I es cero". (justifica tu respuesta con los mínimos cálculos posibles)

(1'25) **10. Resuelve el siguiente problema de Cauchy** $\begin{cases} xy' + 2y = \operatorname{sen} x \\ y(\pi/2) = 0 \end{cases}$

11. Estudia el carácter de las siguientes series:

(0,5) **a.)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

(0,5) **b.)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)!}(x-2)^n$

(0,5) **1. Cálcula** $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}(1-\cos x)}{x\cdot \operatorname{sen} x} = \dfrac{0}{0} =$

(Aplico Taylor)

En $x=0$

$\operatorname{sen} x \sim x - \dfrac{x^3}{3!} \dots \Rightarrow$ En el denominador tendremos $x \cdot \operatorname{sen} x = x\cdot\left(x - \dfrac{x^3}{3!} \dots\right)$

$= x^2 - \dots\dots$

(Por tanto, el estudio del numerador será hasta grado 2, el resto es irrelevante)

$e^x \sim 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} \dots\dots$

$e^{-x} \sim 1 + (-x) + \dfrac{(-x)^2}{2!} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!}$

PRODUCTO DE CAUCHY:

$e^{-x} \sim 1 - x + \dfrac{x^2}{2!}$

$(1-\cos x) \sim \dfrac{x^2}{2!}$

$\dfrac{x^2}{2!} + \dots$

(Me interesa hasta grado 2 por)

$\cos x \sim 1 - \dfrac{x^2}{2!} \dots\dots$

$1 - \cos x \sim 1 - \left(1 - \dfrac{x^2}{2!} \dots\right) = \dfrac{x^2}{2!}$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}(1-\cos x)}{x\cdot \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \dots}{x^2 - \dots} = \frac{1}{2!} = 1/2$$

(1) **2. Calcula** $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ **con un error menos de** 10^{-2}

Nos piden que calculemos el valor de $e^{-2/3}$ con un error menor de 10^{-2}
(Aplico Teorema de Taylor para la cota del error).

Datos

$f(x) = e^x$
$x = -2/3$
$x_0 = 0$

$$\boxed{E_{n,x_0} = \left| \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right|}$$ con $\boxed{\begin{matrix} x_0 < c < x \\ \text{ó} \\ x < c < x_0 \end{matrix}}$

Por tanto, $E_{n,0} = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} (-2/3 - 0)^{n+1} \right| = \left| \frac{(-2)^{n+1} \cdot e^c}{3^{n+1} (n+1)!} \right| \leqslant \left| \frac{(-2)^{n+1} \cdot 1}{3^{n+1} (n+1)!} \right| \leqslant \frac{2^n \cdot 2}{3^n \cdot 3 (n+1)!}$

$f(x) = e^x$
$f'(x) = e^x$
$\vdots$
$f^n(x) = e^x$
$f^{n+1}(x) = e^x$; $f^{n+1}(c) = e^c$

$-2/3 < c < 0$

$e^{-2/3} < e^c < e^0 = 1$

Entonces $\frac{2^n \cdot 2}{3^n \cdot 3 (n+1)!} < \frac{1}{100}$

$2^n \cdot 2 \cdot 100 < 3^n \cdot 3 (n+1)!$

Para $n = 1$ ¿$400 < 18$? No

Para $n = 2$ ¿$800 < 162$? No

Para $n = 3$ ¿$1600 < 1944$? Sí

Por tanto, el polinomio de Taylor buscado es de grado 3.

$$T_{3,0}(e^x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Si $x = -2/3$ tenemos $1 + (-2/3) + \frac{(-2/3)^2}{2!} + \frac{(-2/3)^3}{3!} = 0'506 \simeq 0'51$

(1) **3. Halla los valores máximos y mínimos de** $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ **sujeto a la restricción x + y = 1 con** $x \geq 0$ e $y \geq 0$

Ecuación lagrangiana: $L(x,y,\lambda) = 1 - x^2 - y^2 - \lambda(x+y-1)$

$\frac{\delta L}{\delta x}(x,y,\lambda) = -2x - \lambda$

$\frac{\delta L}{\delta x}(x,y,\lambda) = -2y - \lambda$

$\frac{\delta L}{\delta \lambda}(x,y,\lambda) = -x - y + 1$

(Para hallar los puntos críticos igualamos a cero)

$-2x - \lambda = 0$
$-2y - \lambda = 0$
$-x - y - 1 = 0$

$\Rightarrow$ (Es igual que)
① $2x + \lambda = 0$
② $2y + \lambda = 0$
③ $x + y = 1$

Restamos ① y ②

$$\begin{array}{r} 2x+\lambda=0 \\ -\quad 2y+\lambda=0 \\ \hline 2x-2y=0 \end{array}$$

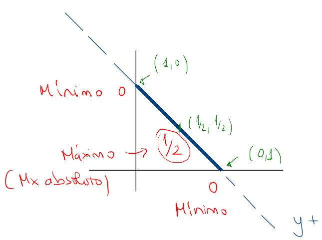
Establecemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Solución $\begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \end{cases}$

Puntos críticos del sistema $(1/2, 1/2)$.

Hay que tener en cuenta también que $x \geq 0$; $y \geq 0$. Hagamos un dibujo:



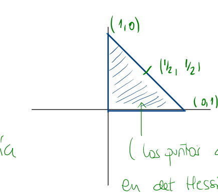
Observaciones: ¿El punto $(1/2, 1/2)$ tenemos que estudiarlo? Sí

¿Qué otros puntos debo estudiar? $(1,0)$ y $(0,1)$ que son los puntos de corte de $x+y=1$ con $x \geq 0$ e $y \geq 0$

¿Debo estudiar el determinante Hessiano de $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$? En este problema no ya que la condición nos dice que sólo debe ser en un trozo de recta (la dibujada).

(Si el enunciado dijese: "Estudia los extremos de $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ en el área comprendida entre $x+y=1$ con $x \geq 0$; $y \geq 0$ sí tendríamos que estudiar el det Hessiano)

ó si dijese $x + y < 1$ con $x \geq 0$; $y \geq 0$ también deberíamos estudiarlo ya que el dibujo en ambos casos sería



(Los puntos que salieran en det Hessiano que pertenezcan a la parte sombreada (Hay que comprobarlo)

Calculamos los valores de la función para esos puntos:

$f(1,0) = 0$

$f(1/2, 1/2) = 1/2$

$f(0,1) = 0$

4. **Sea f (x,y) =** $\begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad (0,5) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \quad (0,25) \end{cases}$

a.) Demuestra que f(x,y) no es continua

b.) ¿Es diferenciable? Justifica tu respuesta

a)

$f(x,y)$ es continua si $f(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^4+y^2}$

- $f(0,0) = 0$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x^2}} \dfrac{3x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2\cdot x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^4}{2x^4} = 3/2$

Por tanto queda demostrado que $f(x,y)$ no es continua.

b)

Como $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$, no será diferenciable en ese punto y no tiene sentido estudiar la diferenciabilidad.

5. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a.) Estudia la continuidad (0,25)
b.) Estudia las derivadas parciales (0,25)
c.) Estudia la diferenciabilidad (0,5)
d.) Estudia las derivadas direccionles en cualquier dirección. (0,5)
e.) Estudia la derivada direccional en la dirección (1,-1) (0,25)

a) $f(x,y)$ es continua si $f(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^3}{x^2+y^2}$

- $f(0,0) = 0$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{4x}_{0} \cdot \underbrace{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{Acotado}} = 0$ (Por el teorema de acotación)

Por tanto $f(x,y)$ es continua.

b) $\dfrac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0) = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{\frac{4h^3}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{4h^3}{h^3} = 4$

$\dfrac{\delta f}{dy}(x_0,y_0) = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h} = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{\cancel{\frac{0}{0^2+h^2} - 0}\ 0}{h} = 0$

c) Es diferenciable si $\lim\limits_{(h,k)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\delta f}{dx}(x_0,y_0)h - \frac{\delta f}{dy}(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$; Veámoslo:

$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(h,k) - f(0,0) - 4h - 0k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\frac{4h^3}{h^2+k^2} - 4h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\frac{4h^3 - 4h(h^2+k^2)}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$

$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{4h^3 - 4h(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\cancel{4h^3} - \cancel{4h^3} - 4hk^2}{h^2+k^2\sqrt{h^2+k^2}} = \lim\limits_{\substack{(h,k)\to(0,0) \\ \boxed{h=mk}}} \dfrac{-4hk^2}{h^2+k^2\sqrt{h^2+k^2}} =$

$\lim\limits_{k\to0} \dfrac{-4m\cdot k\cdot k^2}{(mk)^2+k^2\sqrt{(mk)^2+k^2}} = \lim\limits_{k\to0} \dfrac{-4mk^3}{m^2k^2+k^2\sqrt{m^2k^2+k^2}} = \lim\limits_{k\to0} \dfrac{-4mk^3}{k^2(m^2+1)\cdot\sqrt{k^2(m^2+1)}} =$

(sale de la raíz y se multiplica por el k^2)

$\lim\limits_{k\to0} \dfrac{-4mk^3}{k^3(m^2+1)\sqrt{m^2+1}} = -4m.$

EL límite no existe porque depende de m, por tanto la función no es diferenciable

d) Aplicamos la definición de derivada direccional

$$d_u f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h\cos\theta, y_0 + h\operatorname{sen}\theta) - f(x_0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\cos\theta, h\operatorname{sen}\theta) - f(0,0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{4h^3\cos^3\theta}{h^2\cos^2\theta + h^2\operatorname{sen}\theta} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h^3\cos^3\theta}{h(h^2\cos^2\theta + h^2\operatorname{sen}\theta)} = \lim_{h\to 0} \frac{4h^3\cos^3\theta}{h^3(\underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{1})} = \underline{\underline{4\cos^3\theta}}$$

e) En la dirección $(1, -1)$. Primero hallamos el vector unitario: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

Ahora podemos aplicar de nuevo la definición de derivada direccional ...

ó podemos aprovechar el resultado del apartado anterior.

Recuerda la teoría: $\underbrace{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)}_{\text{(Vectores unitario)}}$ $\underbrace{d_v(f(x_0,y_0))}_{\substack{\text{Derivada direccional} \\ \text{que depende de} \\ \cos\theta \text{ y } \operatorname{sen}\theta}}$

$1/\sqrt{2}$ $(-1/\sqrt{2})$

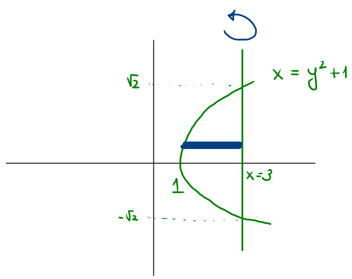
Como la derivada direccional es $4\cos^3\theta$ en cualquier dirección, en la dirección pedida $(1,-1)$ será $\underline{\underline{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}}$

6. Sea el volumen generado al girar la región comprendida entre la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta x=3 alrededor de la recta x=3

(0,5) **a.) Plantea (sin solucionar) el volumen de dicha figura por el método de los discos**

(0,5) **b.) Plantea (sin solucionar) el volumen de dicha figura por el método de las capas**

a) MÉTODO DE LOS DISCOS
- Sección perpendicular al eje de giro
- Giramos paralelo al eje OY (Necesito $f(y)$)



$$V = \pi \int_c^d (K - f(y))^2 \, dy = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(3 - (y^2+1)\right)^2 dy = \boxed{\pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - y^2)^2 \, dy}$$

Se pedía hasta aquí.

$f(y) = y^2 + 1$

Puntos de corte: $y^2 + 1 = 3$

$y = \pm\sqrt{2}$.

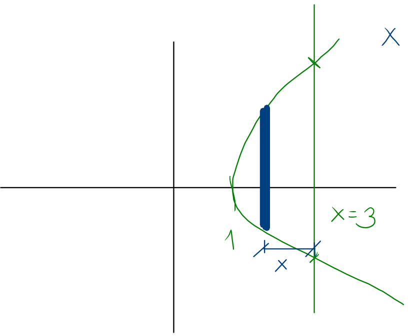
Si solucionamos la integral, tenemos $V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - y^2)^2 dy = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 + y^4 - 4y^2) \, dy = \dfrac{16\pi\sqrt{2}}{15}$

(Como los límites de integración son incómodos de calcular sin calculadora, podemos adoptar los siguientes límites (Recomendable) $V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 + y^4 - 4y^2) dy =$

$$= 2 \cdot \pi \int_0^{\sqrt{2}} (4 - y^4 - 4y^2) dy =$$

b) MÉTODO DE LAS CAPAS CILÍNDRICAS

- Seciones paralelas al eje de giro
- Giramos paralelo al eje OY (Necesito $f(x)$)



$f(y) = y^2+1$ Necesito $f(x)$, por tanto:

$$y = \pm\sqrt{x+1}$$

Esta función no es inyectiva, debo quedarme con la parte positiva ó negativa y por tanto debo ajustar la expresión

$$V = 2\pi\int_a^b (K-x)\cdot f(x)\,dx = \boxed{2\cdot 2\cdot\pi\int_1^3 (3-x)\sqrt{x+1}\,dx} = \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}.$$

Se pedía hasta aquí,

Para solucionar esta integral, hacemos un cambio de variable:

CV $\Rightarrow$ $\sqrt{x+1} = t$; $x+1 = t^2$; $x = t^2+1$

$dx = 2t\,dt$

Los límites:

Para $x=1 \Rightarrow 1 = t^2+1$; $t=0$

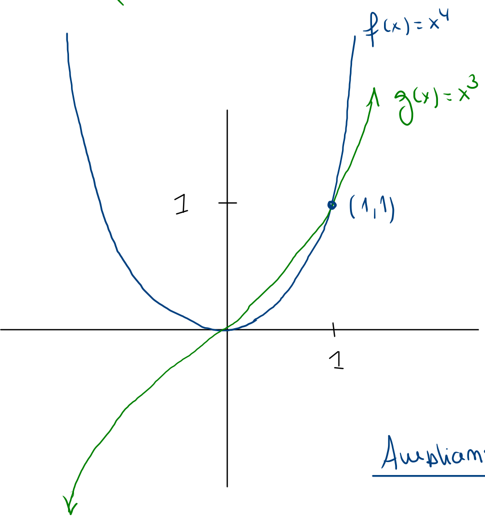
Para $x=3 \Rightarrow 3 = t^2+1$; $t=\sqrt{2}$

$$4\pi\int_1^3 (3-x)\sqrt{x+1}\,dx = 4\pi\int_0^{\sqrt{2}} \left[3-(t^2+1)\right]\cdot t\cdot 2t = 4\pi\int_0^{\sqrt{2}} (2-t^2)\cdot 2t^2\,dt = 4\pi\int_0^{\sqrt{2}} (4t^2-2t^4)\,dt = \ldots = \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}$$

7. Sea $\iint_R f(xy)\,dA$ siendo R la región comprendida enre $f(x)= x^4$ y $g(x)= x^3$

(0,5) **a.) Plantea (sin solucionar) dicha integral doble en un dominio tipo I**

(0,5) **b.) Plantea (sin solucionar) dicha integral doble en un dominio tipo II**



Puntos de Corte: $f(x)=g(x)$ Es decir para $(0,0)$ $(1,1)$

Para dibujarla compruebo $f(1/2)$ y $g(1/2)$

$f(1/2)=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

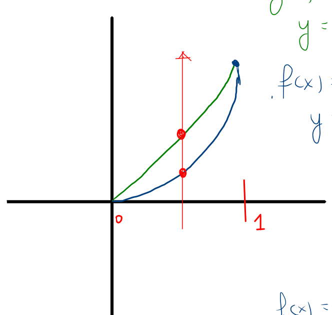
$g(1/2)=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

Como $\frac{1}{16}<\frac{1}{8}$ Entonces: $f(x)<g(x)$ ($g(x)$ se dibuja por arriba)

Ampliamos la gráfica

$g(x)=x^3$
$y=x^3$

$f(x)=x^4$
$y=x^4$



Región tipo I

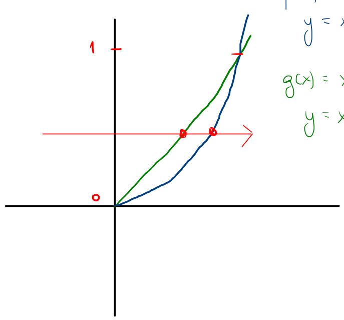
$0\leq x\leq 1$

$x^4\leq y\leq x^3$

$$\int_0^1\int_{x^4}^{x^3} f(x,y)\,dy\,dx$$

$f(x)=x^4$
$y=x^4$; $x=\pm\sqrt[4]{y}$

$g(x)=x^3$
$y=x^3$; $x=\sqrt[3]{y}$



Región tipo II

$0\leq y\leq 1$

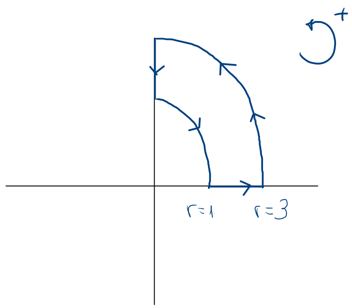
$\sqrt[3]{y}\leq x\leq +\sqrt[4]{y}$

$$\int_0^1\int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt[4]{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

(1) **8. Calcula** $\displaystyle\oint_c \underbrace{(xy + e^{x^2})}_{P(x,y)}\,dx + \underbrace{(x^2 - \ln(1+y))}_{Q(x,y)}\,dy$

siendo c la curva del primer cuadrante, con orientación positiva formada por la región limitada por

$x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=9$. **(Resolver hasta el final)**



Primero comprobamos si el campo vectorial es conservativo:

¿ $\dfrac{\delta P(x,y)}{\delta y} = \dfrac{\delta Q(x,y)}{\delta x}$?

$\dfrac{\delta P(x,y)}{\delta y} = x$

$\dfrac{\delta Q(x,y)}{\delta x} = 2x$

No es conservativo.

Pero al ser una curva cerrada, puedo aplicar T. Green

$$\oint \vec{F}\,d\vec{r} \underset{\text{T. Green}}{=} \iint_R \left(\frac{\delta Q}{\delta x}(x,y) - \frac{\delta P}{\delta y}(x,y)\right) dA = \iint_R (2x - x)\,dA = \iint_R x\,dA \underset{\text{C.V. coordenadas polares.}}{=}$$

Cambio a polares:

$x = r\cos t$
$y = r\,\text{sen}\,t$

$\det(\text{Jac}) = r$

$r \in [1, 3]$

$t \in [0, \pi/2]$

$F \circ T = F(r\cos t, r\,\text{sen}\,t) = r\cos t$

$$\iint_R x\,dA = \iint_R F\circ T \cdot \det(\text{Jac}) \cdot dr\,dt = \iint_R r\cdot\cos t\cdot r\,dr\,dt = \int_0^{\pi/2}\int_1^3 r^2\cos t\,dr\,dt =$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt \cdot \int_1^3 r^2\,dr = \underbrace{\text{sen}\,t\Big]_0^{\pi/2}}_{1} \cdot \frac{r^3}{3}\Big]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

(Podemos calcular la integral doble porque en los límites no tenemos ninguna función)

(0,75) **9. Sea** $I = \oint_c (2xy)\,dx - (1-x^2)\,dy$ **siendo c** $x^2+y^2-2x+4y+3=0$

¿Es cierta la siguiente afirmación? "El valor de I es cero". (justifica tu respuesta con los mínimos cálculos posibles)

$$I = \oint_c (2xy)\,dx + (x^2-1)\,dy$$

Compruebo si el campo vectorial es conservativo:

$$\frac{\delta Q}{dy}(x,y) = 2x$$

$$\frac{\delta P}{\delta x}(x,y) = 2x$$

Es conservativo.

Veo de que curva se trata (Completamos cuadrados)

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y + 3 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + 3 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2.$$

Se trata de 1 circunferencia de centro $(1,-2)$ y radio $=\sqrt{2}$.

(Por tanto, es 1 curva cerrada)

Solución: Al ser el campo vectorial conservativo y la región de integración trata de 1 curva cerrada, por el Teorema fundamental de la integral curvilínea el valor de I será cero.

(1'25) **10. Resuelve el siguiente problema de Cauchy** $\begin{cases} xy' + 2y = \operatorname{sen} x \\ y(\pi/2) = 0 \end{cases}$

(Dividimos entre x para dejar y' sola)

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$ Identificamos que es E.D.O lineal $y' + P(x)y + Q(x) = 0$

siendo $p(x) = \frac{2}{x}$ $q(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

La solución vendrá dada por

$$\boxed{y = y_p + C\, y_h}$$

· Para hallar y_h Resuelvo la Ecuación homogénea asociada, es decir elimino el término $q(x)$)

Entonces: $y_h' + \frac{2}{x} y_h = 0$

$$\frac{\delta y_h}{dx} = -\frac{2}{x} y_h$$

$$\frac{\delta y_h}{y_h} = -\frac{2}{x}\, dx$$

(integramos)

$$\int \frac{\delta y_h}{y_h} = \int -\frac{2}{x}\, dx$$

$$\ln|y_h| = -2\ln|x|$$

$$\ln|y_h| = \ln|x|^{-2}$$ ← (IMPORTANTE ESTE PASO)

$$\cancel{e}^{\ln|y_h|} = \cancel{e}^{\ln|x|^{-2}} \; ; \quad y_h = x^{-2} \; ;$$

$$\boxed{y_h = \frac{1}{x^2}}$$

· Por otro lado, la solución particular vendrá dada por: $\boxed{y_p = C(x) \cdot y_h}$

$$y_p = C(x) \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$y_p' = C'(x) \cdot \frac{1}{x^2} - C(x) \cdot \frac{2}{x^3}$$

(Ahora sustituyo $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$)

$$C'(x) \cdot \frac{1}{x^2} \underbrace{\cancel{- C(x) \cdot \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x} \cdot C(x) \cdot \frac{1}{x^2}}}_{\text{(siempre se debe de ir)}} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$C'(x) = x \cdot \operatorname{sen} x \; ; \quad C(x) = \int x \cdot \operatorname{sen} x\, dx \underset{\text{(por partes)}}{=} -x\cos x + \operatorname{sen} x$$

Por tanto, la solución general de la EDO lineal es

$$\boxed{y = y_p + C y_h}$$ donde

$y_p = C(x) \cdot y_h$

$y_p = (-x\cos x + \operatorname{sen} x) \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

$y_h = \frac{1}{x^2}$

$$\boxed{y = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} + \frac{C}{x^2}}$$

Solución general

Para hallar la solución particular: $y(\pi/2) = 0$ Sustituimos los valores y despejamos C

$$0 = \cancel{\frac{-\cos(\pi/2)}{\pi/2}}^{\,0} + \frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{(\pi/2)^2} + \frac{C}{(\pi/2)^2} \; ; \quad C = -1$$

Por tanto, la solución particular es $\boxed{y = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$

11. Estudia el carácter de las siguientes series:

(0,5) **a.)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

(0,5) **b.)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)!}(x-2)^n$

a) Aplico criterio del cociente $\left(\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$

$$\lim \frac{\frac{2^{(n+1)} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{2^n \cdot n!}{n^n}} = \lim \frac{\cancel{2^n} \cdot 2\,(n+1)! \cdot n^n}{\cancel{2^n} \cdot n!\,(n+1)^n \cdot (n+1)} = \lim \frac{2\,\cancel{(n+1) \cdot n!}\; n^n}{\cancel{(n+1)\; n!}\;(n+1)^n} = \lim 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

(Buscamos un nº e ....)

$$\boxed{1 + \frac{n}{n+1} - 1 = 1 + \frac{-1}{n+1}}$$

$$= \lim 2 \cdot \left(1 + \frac{(-1)}{n+1}\right)^n = 2 \cdot e^{-1} < 1$$ $\Rightarrow$ Por el criterio del cociente la serie converge.

b) Es una serie de potencias, aplico criterio del cociente es valor absoluto

$$\lim \left| \frac{\frac{2(n+1)+1}{(n+2)!}(x-2)^{n+1}}{\frac{2n+1}{(n+1)!}(x-2)^n} \right| = \lim \left| \frac{(2n+3)\cancel{(x-2)^n}(x-2)\cancel{(n+1)!}}{(2n+1)\cancel{(x-2)^n}(n+2)\cancel{(n+1)!}} \right| = \underbrace{\lim \frac{(2n+3)}{(2n^2+5n+2)}}_{0} |x-2| =$$

$$= 0 \cdot |x-2| < 1$$ (siempre lo será, por tanto

el campo de convergencia de la serie es $x \in \mathbb{R}$.