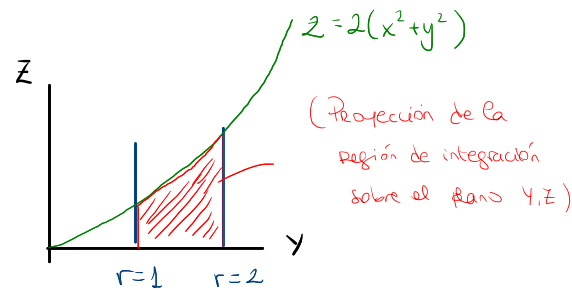
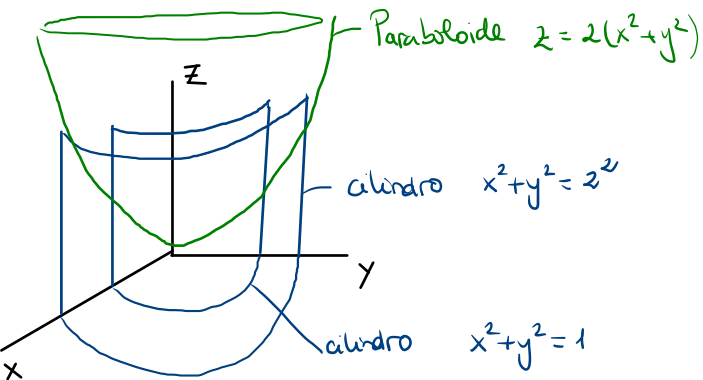


(b) Calcular $\iiint_D z(x^2 + y^2) dx dy dz$, donde D es el sólido en el primer octante comprendido entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 2(x^2 + y^2)$.



Se puede resolver de dos formas

1ª forma: Cambiar a coordenadas cilíndricas. (Aconsejable por simplicidad de cálculos)

Transformado

$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t$$

$$z = z$$

$$\det(jac) = r$$

$$r \in [1, 2]$$

$$t \in [0, \pi/2]$$

$$z \in [0, 2r^2]$$

(Mirar el dibujo)

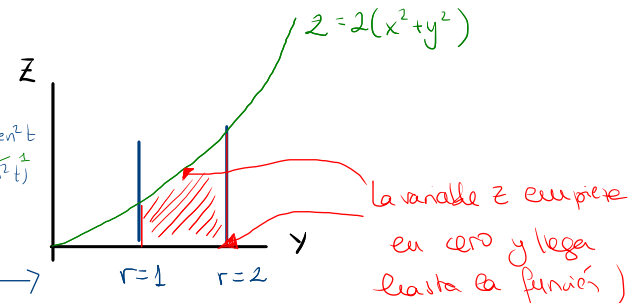
(Metodología)

$$z = 2(x^2 + y^2)$$

$$z = 2 r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t$$

$$z = 2 r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$\underline{z = 2r^2}$$

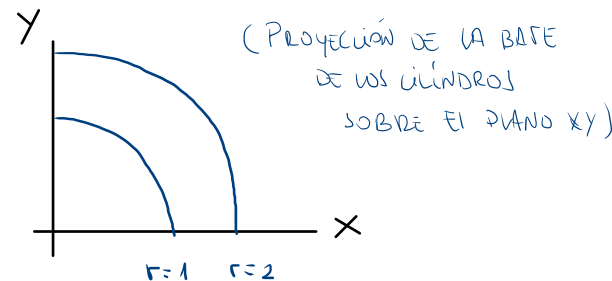
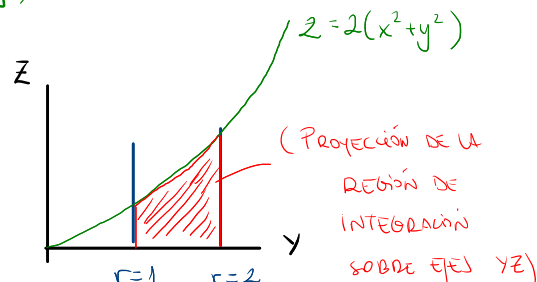
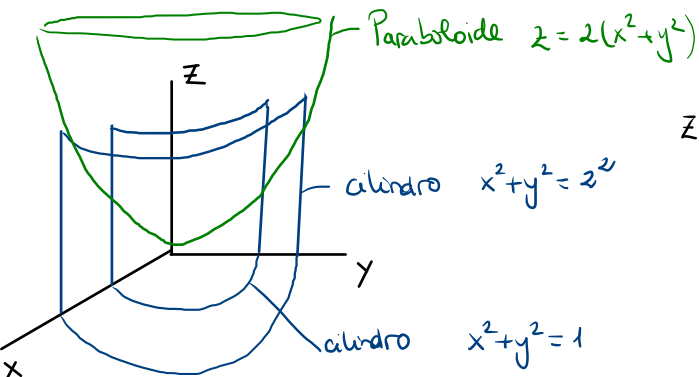


$$F \circ T = F(r \cos t, r \sin t, z) = z(r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t) = \cancel{2r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)}^1$$

$$F \circ T \cdot \det(jac) = z r^2 \cdot r = z r^3$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_1^2 \int_0^{2r^2} z r^3 dz dr dt = \frac{255\pi}{8}$$

2ª forma: Considerar un Dominio tipo I de $\mathbb{R}^3$ y luego hacer cambio de variable a coordenadas polares para el D_{xy} (dominio de las variables x, y) resultante.



Dominio tipo I ($\mathbb{R}^3$) es el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D_{xy} \text{ y } u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$

$$0 \leq z \leq 2(x^2 + y^2)$$

$$\underbrace{\iint_{D_{xy}} \int_0^{2(x^2+y^2)} z(x^2+y^2) dz dy dx}_{\text{Dominio por determinar aún, haremos primero la primitiva con respecto de la variable } z} = \iint_{D_{xy}} 2(x^2+y^2)^3 dy dx =$$

↑ (cambiamos a coordenadas polares)

$$\begin{aligned} x &= r \cos t & r &\in [1, 2] \\ y &= r \sin t & t &\in [0, \pi/2] \end{aligned}$$

$$\det(J_{\phi}) = r$$

$$T \circ T = 2r^6$$

$$T \circ T \cdot \det(J_{\phi}) = 2r^6 \cdot r = 2r^7$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_1^2 2r^7 dr dt = \frac{255\pi}{8}$$