Integrales múltiples

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *un campo escalar. Denotaremos por*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dx\,dy$$

a la **integral doble** *de* $f(x,y)$ *extendida al recinto* $\mathcal{R}$ *de* $\mathbb{R}^2$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si $f(x,y) = 1$, Área$(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} dx\,dy$

Si $f(x,y) \geq 0$ en $\mathcal{R}$ Volumen$(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dx\,dy$

Volumen$(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} \left[f_2(x,y) - f_1(x,y)\right] dx\,dy$

Definición Teorema Fubbini integrales dobles

Un **rectángulo** Q *de* $\mathbb{R}^2$ *no es más que el producto cartesiano de dos intervalos de* $\mathbb{R}$, *es decir*

$$Q = [a,b] \times [c,d] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; a \leq x \leq b,\; c \leq y \leq d\right\}$$

Definición Regiones no rectángulares

Sea $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ *un recinto acotado. Se dice que*

- $\mathcal{R}$ *es de* **tipo I** *si* $\iint F(x,y)\,dy\,dx$

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \;;\; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\right\}$$

- $\mathcal{R}$ *es de* **tipo II** *si* $\iint F(x,y)\,dx\,dy$

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \;;\; h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\right\}$$

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. *Denotaremos por*

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

a la **integral triple** *de* $f(x,y,z)$ *extendida al recinto* $\mathcal{D}$ *de* $\mathbb{R}^3$.

Si $f(x,y,z) = 1$ Volumen$(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} dx\,dy\,dz$

Definición Teorema Fubbini integrales triples

Un **paralelepípedo** H *de* $\mathbb{R}^3$ *no es más que el producto cartesiano de tres intervalos de* $\mathbb{R}$, *es decir:*

$$\begin{aligned} H &= [a,b] \times [c,d] \times [p,q] \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b \;;\; c \leq y \leq d \;;\; p \leq z \leq q\right\} \end{aligned}$$

Regiones no paralelepípedas

$\mathcal{D}$ es un recinto de tipo I $\iiint F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$ (tipo IV)

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; (x,y) \in \mathcal{D}_{xy} \;;\; u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\right\}$$

$\mathcal{D}$ es un recinto de tipo II $\iiint F(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$ (tipo V)

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; (x,z) \in \mathcal{D}_{xz} \;;\; v_1(x,z) \leq y \leq v_2(x,z)\right\}$$

$\mathcal{D}$ es un recinto de tipo III $\iiint F(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$ (tipo VI)

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; (y,z) \in \mathcal{D}_{yz} \;;\; w_1(y,z) \leq x \leq w_2(y,z)\right\}$$

Integrales de línea: definición **RECUERDA!!**

Se define **integral de línea** *o* **circulación** *de* $\vec{f}$ *a lo largo de* $\vec{\alpha}$

(mide el trabajo o potencial)

$$\int_C \vec{f}\,d\vec{\alpha} = \int_a^b \vec{f}[\vec{\alpha}(t)] \cdot \vec{\alpha}'(t)\,dt$$

A través del Teorema de Green, la integral de línea se puede calcular como una integral doble siendo la magnitud de medida la misma.

(consultar "apuntes de integral de línea" para completar la información...)

Coordenadas polares (circunferencia)

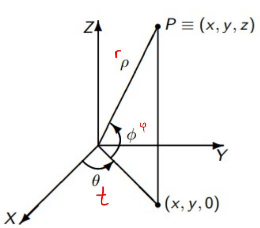
x = r cost r [,] y = r sent t [,] det (jacobiano) = r	$\iint F \circ T \cdot \det(jac)\, dr\, dt$

Coordenadas cilíndricas

(la variable que varia es z)	(la variable que varia es x)	(la variable que varia es y)
x = r cost r [,] y = r sent t [,] z = z z [,] * Metodología det (jacobiano) = r	x = x r [,] y = r cost t [,] z = r sent x [,] * Metodología det (jacobiano) = r	x = r cost r [,] y = y t [,] z = r sent y [,] * Metodología det (jacobiano) = r
$\iiint F \circ T \cdot \det(jac) \cdot dz\, dr\, dt$	$\iiint F \circ T \cdot \det(jac) \cdot dx\, dr\, dt$	$\iiint F \circ T \cdot \det(jac) \cdot dy\, dr\, dt$

Coordenadas esféricas

Coordenadas esféricas



x = r cost cos ϕ
y = r sent cos ϕ
z = r sen ϕ

r [,]

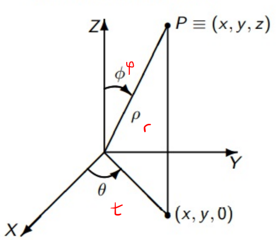
t [0 , 2π]

$\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

MUY IMPORTANTE: Datos para esfera completa, si es un trozo de esfera los parámetros tienen que ser ajustados

det (jacobiano) = $r^2 \cos\phi$

Coordenadas esféricas



x = r cost sen ϕ
y = r sent sen φ
z = r cos ϕ

r [,]

t [0 , 2π]

$\phi \in [0, \pi]$

MUY IMPORTANTE: Datos para esfera completa, si es un trozo de esfera los parámetros tienen que ser ajustados

det (jacobiano) = $r^2 \text{sen}\,\phi$